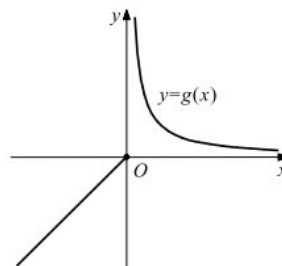


ΘΕΜΑ Α

- A1. σχ. βιβλίο σελ. 99 παράγραφος 2.1
A2. α. Ψ σχ. βιβλίο σελ. 35 παράγραφος 1.3
β. Αντιπαράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Η f είναι 1-1 όμως δεν είναι γνησίως μονότονη.



- A3. σχ. βιβλίο σελ. 217 παράγραφος 3.5

- A4. α. Λ
β. Λ
γ. Σ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

- B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_f = \mathbb{R}^*$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 1 - \frac{0 \cdot x^2 - 4 \cdot 2x}{x^4} = 1 - \frac{-8x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3} \circ$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$	-	0	+	+
x^3	-	-	+	+
f'	+	0	-	+
f				

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -2$ με τιμή $f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -3$.



B2. Η $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, ως πράξη παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $f''(x) = 1' + \frac{8'x^3 - 8(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{-24x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0$, άρα η f είναι κοίλη.

B3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

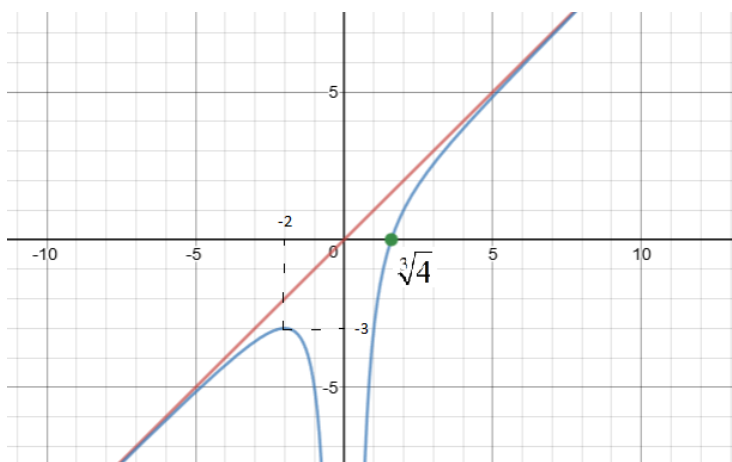
Το 0 είναι ανοικτό πραγματικό άκρο του A_f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

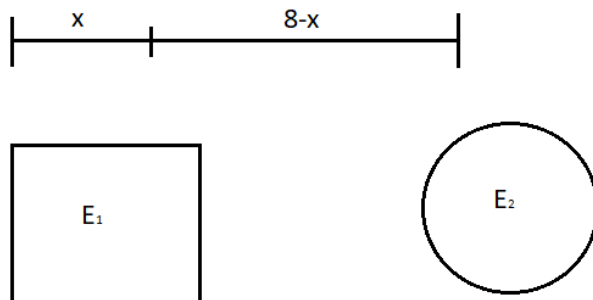
Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Όμως υπολογίζουμε και το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ για να ξέρουμε τη συμπεριφορά της C_f στο 0^+ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

B4.



ΘΕΜΑ Γ
Γ1.



$$E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

$$L_2 = 2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi} \quad (1)$$

$$E_2 = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(8-x)^2}{16\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(64 - 16x + x^2)}{16\pi} \Leftrightarrow$$

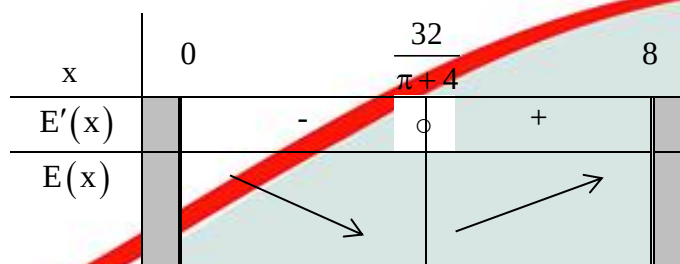
$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$

$$\Gamma 2. E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x - 32}{8\pi}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{32}{\pi+4}$$



Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο για $x = \frac{32}{\pi+4}$ με ελάχιστη τιμή $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$

Για $x = \frac{32}{\pi+4}$: Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$

Η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta = 2\rho \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \delta = 2 \cdot \frac{8-x}{2\pi} \Leftrightarrow \delta = \frac{8}{\pi+4}$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Θα δείξουμε ότι $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση για κάθε $x \in (0, 8)$

➤ Για $x \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

Επομένως, $E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right]$

Το $5 \in \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$. Άρα, η $E(x) = 5$ έχει μια τουλάχιστον λύση και επειδή η

$E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$, η $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα αυτό.

➤ Για $x \in \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

Επομένως, $E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$

Το $5 \notin \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$. Άρα, η $E(x) = 5$ δεν έχει λύση στο διάστημα αυτό.

Επομένως, υπάρχει μοναδικός τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δυο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 .

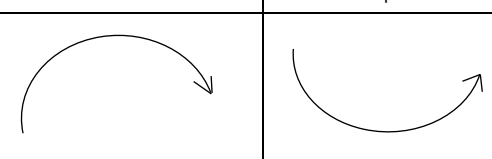


ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Rightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Rightarrow e^{x-\alpha} = e^0 \Rightarrow x - \alpha = 0 \Rightarrow x = \alpha$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	-	0	+
f			

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Rightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Rightarrow e^{x-\alpha} > e^0 \Rightarrow x - \alpha > 0 \Rightarrow x > \alpha$$

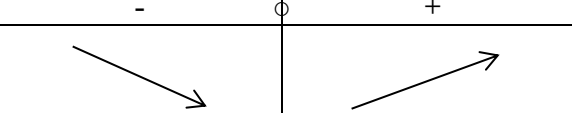
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, \alpha]$ και κυρτή στο $[\alpha, +\infty)$. Η f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$

$$f(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - \alpha^2 = 2e^0 - \alpha^2 = 2 - \alpha^2$$

○

Δ2. $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

➤ Μονοτονία της f'

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	-	0	+
f'			

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$. Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \alpha$ με τιμή $f'(\alpha) = 2e^0 - 2\alpha = 2 - 2\alpha = 2(1 - \alpha)$



➤ Σύνολο τιμών της f'

- Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, \alpha]$ άρα

$$f'(A_1) = [f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^{x-\alpha} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x}{e^\alpha} - 2x \right) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\text{Άρα } f'(A_1) = [2(1-\alpha), +\infty)$$

- Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = (\alpha, +\infty)$ άρα

$$f'(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x) = f'(\alpha) = 2(1-\alpha) \quad (\text{αφού } f' \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = \alpha)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe^{x-\alpha} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \left(\frac{2e^x}{e^\alpha \cdot 2x} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \left(\frac{e^x}{2e^\alpha x} - 1 \right) \right] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^\alpha x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^\alpha} = +\infty$$

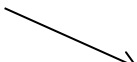
$$\text{Άρα } f'(A_2) = (2(1-\alpha), +\infty)$$

$$\text{Το } 2(1-\alpha) < 0 \text{ αφού } \alpha > 1 \Rightarrow 1-\alpha < 0$$

Άρα το $0 \in f'(A_1)$ και f' γνησίως φθίνουσα στο A_1 οπότε η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση x_1 στο A_1 .

Και το $0 \in f'(A_2)$ και f' γνησίως αύξουσα στο A_2 , οπότε η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση x_2 στο A_2 .

Μένει να δείξουμε ότι αλλάζει η μονοτονία της f εκατέρωθεν των x_1, x_2 .

X	$-\infty$	X_1	α	X_2	$+\infty$	
f'						
f'	+	○	-	-	○	+
f						
						



Για κάθε $x \in (-\infty, x_1)$ το $x < x_1 \xRightarrow{f' \downarrow} f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$

Για κάθε $x \in (x_1, \alpha)$ το $x > x_1 \xRightarrow{f' \downarrow} f'(x) < f'(x_1) \Rightarrow f'(x) < 0$

Για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ το $x < x_2 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$

Για κάθε $x \in (x_2, +\infty)$ το $x > x_2 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$, f γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, \alpha]$, f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$ οπότε f συνεχής στο $x_0 = \alpha$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$.

Η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στο x_1 και ένα τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. Στο $\Delta = [\alpha, x_2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα $f(\Delta) = [f(x_2), f(\alpha)]$

Θα δείξουμε ότι $x_1 \geq 1 \Leftrightarrow_{x \in (-\infty, \alpha]} f'(x_1) \leq f'(1)$

$0 \leq f'(1)$, όμως $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2(e^{1-\alpha} - 1)$

Άρα $2(e^{1-\alpha} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} \geq e^0 \Leftrightarrow 1-\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ ΑΤΟΠΟ

Άρα $x_1 < 1$, οπότε $1 \in (x_1, \alpha)$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα $1 < \alpha \Leftrightarrow f(1) > f(\alpha)$, οπότε $f(1) \notin f(\Delta)$

Έστω $\Delta_1 = (\alpha, x_2)$ άρα $f(\Delta_1) \subseteq f(\Delta)$, επομένως το $f(1) \notin f(\Delta_1)$.

Άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο $\Delta_1 = (\alpha, x_2)$

Δ4. (ε): εφαπτομένη της C_f στο $(2, f(2))$

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - (-2) = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 2$

f : κυρτή στο $[2, +\infty)$

Από σχόλιο εφαπτομένης $f(x) \geq y$, για κάθε $x \in [2, 3]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x_0 = 2$.

$f(x) \geq (-2x + 2) \xRightarrow{x > 2} f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2}$, για κάθε $x \in [2, 3]$ και το

"=" ισχύει μόνο για $x_0 = 2$.



Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[2, 3]$ οπότε

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > \int_2^3 (-2x+2) \sqrt{x-2} dx$$

$$\text{Θέτω } I = \int_2^3 (-2x+2) \sqrt{x-2} dx$$

$$\text{Θέτω } \sqrt{x-2} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-2}} dx = du \Rightarrow dx = 2\sqrt{x-2} du \Rightarrow dx = 2u du$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow u = 0, x = 3 \Rightarrow u = 1$$

$$I = \int_0^1 (-2u^2 - 4 + 2) u 2u du = \int_0^1 (-2u^2 - 2) 2u^2 du = \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2) du =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{4u^5}{5} - \frac{4u^3}{3} \right) du = \left[-\frac{4u^5}{5} - \frac{4u^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-12-20}{15} = -\frac{32}{15}$$

$$\text{Οπότε } \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}$$

