

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 15

β) i. Σχολικό βιβλίο σελ. 35

ii. Σχολικό βιβλίο σελ. 36

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

A4. α) Δ και αιτιολογήση το σχόλιο του σχολικού βιβλίου σελ. 134

β) Δ διότι δε γνωρίζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0

$$\text{Για παράδειγμα } f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 1$$

A5. γ

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η $f(x)$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$ θα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \lambda \right) = 0 + \lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 2$$

B2. Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = e^{-x} + 2 - x$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Η g συνεχής στο $[2, 3]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

$$g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} \text{ και } g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = e^{-3} - 1 \text{ οπότε } g(2) \cdot g(3) = e^{-2} \cdot (e^{-3} - 1) < 0$$

Απο θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $g(x) = f(x) - x$ στο $(2, 3)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1-1 στο $\mathbb{R}$. Άρα θα είναι και 1-1 στο $(2, 3)$, δηλαδή η ρίζα θα είναι μοναδική.

B3. Έχουμε $f(x) = e^{-x} + 2, x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως είναι και 1-1 στο $\mathbb{R}$ και θα αντιστρέφεται.

Σύνολο τιμών της f

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} + 2 \right) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + 2 \right) = 2 \text{ οπότε } f(A) = (2, +\infty)$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega f(x) = y \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(y - 2) = \ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln(y - 2) = -x \Rightarrow x = -\ln(y - 2), y \in f(A)$$

Η παραπάνω λύση ανήκει στο $D_f = \mathbb{R}$ αν και μόνον αν $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\ln(y - 2) \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 2$

Τελικά είναι $x = -\ln(y - 2)$ με $y > 2 \Rightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y - 2), y > 2$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$

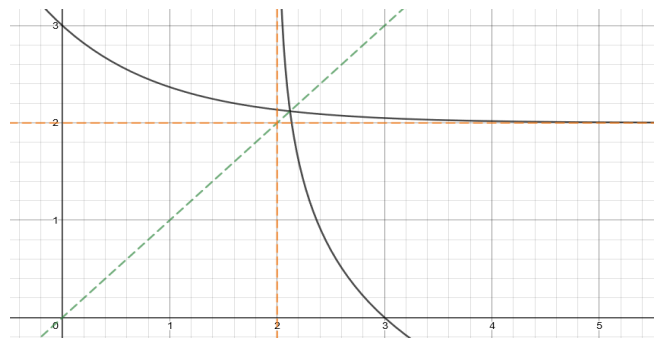
B4. Έχουμε $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x - 2))$$

$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0^+$. Θέτουμε $u = x - 2$ με το $u \rightarrow 0^+$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$

Άρα η $\varepsilon: x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα είναι και συνεχής

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) \Rightarrow 1 + \alpha = 1 + \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad (1)$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - (1 + \alpha)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \alpha) = 1 + \alpha$$

Άρα $1 + \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ και $(1) \Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow \beta = 1$

Γ2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x > 0$, για

κάθε $x < 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πράξη και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ για κάθε $x < 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
Μονοτονία f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Συνεχής

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

και f συνεχής στο 1 οπότε $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Σύνολο τιμών

f συνεχής στο $A = \mathbb{R}$ και $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} + x) = +\infty \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Άρα $f(A) = \mathbb{R}$

Γ3. i) $A_1 = (-\infty, 0)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0) = A_1$ και η $f \nearrow$ στο A_1 οπότε $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{x-1} + x) = \frac{1}{e}$$

$$\text{Άρα } f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right)$$

$0 \in f(A_1) \Rightarrow$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον αρνητική ρίζα x_0 και $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε η f έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία είναι αρνητική.

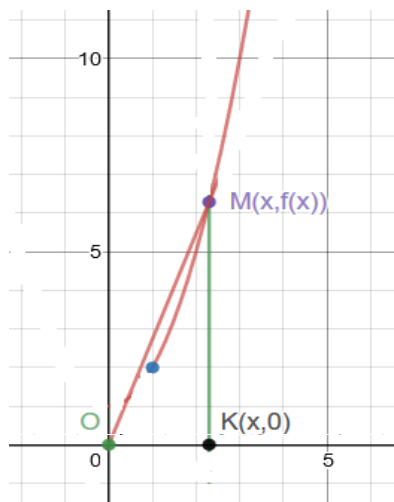
ii) $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_2 = (x_0, +\infty)$ και $f \nearrow$ στο A_2 οπότε $f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$ διότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(x_0) = 0$

Επομένως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ και $x_0 < 0 \Rightarrow -x_0 > 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$

Η εξίσωση $f(x)(f(x) - x_0) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$ επειδή είναι γινόμενο θετικών ποσοτήτων.

Γ4. Για $x \geq 1$ η $f(x) = x^2 + 1$



$$x(t_0) = 3$$

$$x'(t_0) = 2 \text{ μον/sec}$$

$$(MOK) = \frac{1}{2} x \cdot f(x) \Rightarrow E = \frac{1}{2} x (x^2 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{2} x (x^2 + 1) \Rightarrow E(x) = \frac{1}{2} (x^3 + x)$$

$$\text{Οπότε } E(t) = \frac{1}{2} (x^3(t) + x(t))$$

Η E είναι παραγωγίσιμη ως πράξη και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$E'(t) = \frac{1}{2} (3x^2(t)x'(t) + x'(t)) \stackrel{t=t_0}{\Rightarrow} E'(t_0) = \frac{1}{2} (3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)) \Rightarrow E'(t_0) = \frac{1}{2} (3 \cdot 9 \cdot 2 + 2) = 28 \text{ μον}^2/\text{sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η (ε) εφάπτεται στην C_f στο σημείο $A(1,1)$ άρα $f(1)=1$ και $\lambda_\varepsilon = f'(1) \Rightarrow f'(1) = -1$

Έχουμε $f(1) = a + \beta$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + a \Rightarrow f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + a \text{ με } f'(1) = -1 \Rightarrow \ln 1 + 0 + a = -1 \Rightarrow a = -1$$

και $f(1) = 1 \Rightarrow -1 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 2$.

Δ2. Θεωρούμε συνάρτηση $\kappa(x) = f(x) - y \Rightarrow \kappa(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 - (-x + 2) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

Η $\kappa(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$ διότι $x-1 \geq 0$ και $\ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

Η συνάρτηση κ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $I = \int_1^2 |\kappa(x)| dx = \int_1^2 \kappa(x) dx = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) dx$

$$\text{Θέτουμε } x^2 - 2x + 2 = u \Rightarrow (x^2 - 2x + 2)' dx = u' du \Rightarrow (2x - 2) dx = du \Rightarrow (x-1) dx = \frac{1}{2} du$$

Για $x=1 \Rightarrow u=1$ και για $x=2 \Rightarrow u=2$

$$\text{Τότε } I = \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \frac{1}{2} \left([u \ln u]_1^2 - \int_1^2 1 du \right) = \frac{1}{2} \left(2 \ln 2 - 0 - \int_1^2 u' du \right) = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - [u]_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 2 + 1) = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

$$\Delta 3. \text{ i) } f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \Rightarrow f'(x) = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1$$

Θα δείξουμε ότι $f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$ το οποίο ισχύει διότι $\ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει

μόνο για $x=1$ και $\frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

$$\text{ii) } \Theta\alpha \text{ δείξουμε ότι } f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} - \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 2 - \frac{1}{2} - \lambda \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\alpha) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Όμως έχουμε δείξει ότι } f'(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ άρα και } f'(\alpha) \geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

β' τρόπος:

Έστω $g(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x) + (x)' = f'(x) + 1 \geq 0$ αφού $f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα $g \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 2 \Leftrightarrow g\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq g(\lambda) \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 0 \text{ ισχύει}$$

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = -3x^2 - 1$ και $g'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$

Εξετάζουμε αν η (ε) εφάπτεται της C_g σε κάποιο σημείο $B(x_1, g(x_1))$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_1 \in D_g$ τέτοιο ώστε το σημείο B να ανήκει στην ευθεία (ε) και ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε)

$$\lambda_\varepsilon = g'(x_1)$$

$$g(x_1) = -x_1 + 2 \Leftrightarrow -x_1^3 - x_1 + 2 = -x_1 + 2 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$\text{και } \lambda_\varepsilon = g'(x_1) \Rightarrow -1 = -3x_1^2 - 1 \Rightarrow x_1 = 0$$

Η (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g

Θα δείξουμε ότι η (ε) είναι μοναδική.

Επειδή η $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$

και η $g'(x) \leq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, οι κλίσεις των C_f, C_g μπορούν να γίνουν ίσες μόνο για ένα ζεύγος τιμών.

Επομένως οι C_f, C_g μπορούν να δεχθούν μόνο μια κοινή εφαπτομένη την $(\varepsilon): y = -x + 2$

(η C_f στο $A(1,1)$ και η C_g στο $B(0,2)$)