

ΘΕΜΑ Α

A1. β

A2. γ

A3. α

A4. γ

A5. α) Λ Β) Σ Γ) Λ Δ) Σ Ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, η συχνότητα που αντιλαμβάνεται είναι: $f_1 = \frac{u}{u+u_s} f_s$ (1)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση: $\overrightarrow{P_{αρχ}} = \overrightarrow{P_{τελ}} \rightarrow mu_s = 2mV_s \rightarrow V_s = \frac{u_s}{2}$ (2)

Μετά την κρούση η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι: $f_2 = \frac{u}{u+\frac{u_s}{2}} f_s$ (3)

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (3) προκύπτει:

$$\frac{(1)}{(3)} \rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{u}{u+u_s} f_s}{\frac{u}{u+\frac{u_s}{2}} f_s} = \frac{u+\frac{u_s}{2}}{u+u_s} = \frac{2u+u_s}{2u+2u_s} = \frac{2u+\frac{u}{20}}{2u+\frac{u}{10}} = \frac{\frac{41u}{20}}{\frac{21u}{10}} = \frac{41}{42} \quad (\text{ii})$$

B2. Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε: $A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow 2A_2 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_2 = 2u_1$ [1]

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot 4u_1^2 \Rightarrow p_1 = p_{atm} + \frac{3}{2} \rho u_1^2$ [2]

Όμως $p_1 = p_{atm} + \rho gh$ [3]

Από τις [2] και [3] προκύπτει: $\frac{3}{2} \rho u_1^2 = \rho gh \Rightarrow u_1^2 = \frac{2gh}{3} \Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2gh}{3}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{u_2}{2} = \sqrt{\frac{2gh}{3}} \Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{8gh}{3}}$ [4]

Αφού η στάθμη του υγρού στο δοχείο παραμένει σταθερή τότε: $\Pi_{\Gamma} = \Pi_Z \Rightarrow 2A_2 u_2 = A_3 u_3 \Rightarrow u_3 = 2u_2$ [5]

Από το θεώρημα Torricelli για την ταχύτητα u_3 έχουμε: $u_3 = \sqrt{2gH} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} u_2 = \frac{\sqrt{2gH}}{2}$ [6]

Από τις σχέσεις [4], [6] προκύπτει $\sqrt{\frac{8gh}{3}} = \frac{\sqrt{2gH}}{2} \Rightarrow \frac{4h}{3} = \frac{H}{4} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$ (iii)

B3. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της ράβδου από το σημείο Α στο Δ: $K_{\text{TEA}} - K_{\text{APX}} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = FL \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ML^2 \omega^2 = FL \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 3\pi \text{ rad/s}$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος που προκύπτει από την πλαστική κρούση είναι: $I' = \frac{1}{3} ML^2 + mL^2 = 2kg \cdot m^2$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Σ. για την κρούση: $L_{\text{TEA}} = L_{\text{APX}} \Rightarrow I' \omega' = I \omega \Rightarrow \omega' = \frac{3\pi}{2} \text{ rad/s}$

Μετά την κρούση η συνολική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδέν, άρα αυτό κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και επομένως ο χρόνος που θα χρειαστεί η ράβδος είναι: $\varphi = \omega' t \Rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega'} \Rightarrow t = \frac{1}{3} s$ (ii)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στη θέση ισορροπίας ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta \ell = m_1 \cdot g \Rightarrow k = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta \ell} \Rightarrow k = \frac{10}{0,05} \Rightarrow k = 200 \text{ N/m}$

Μετά την σύγκρουση, στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει $\Sigma F' = 0 \Rightarrow k \cdot x = (m_1 + m_2)g \Rightarrow x = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow x = \frac{20}{200} \Rightarrow x = 0,1\text{m}$

Η απόσταση αυτή είναι και το πλάτος της ταλάντωσης, άρα $A = 0,1\text{m}$

Γ2. Η απόσταση του σημείου σύγκρουσης από τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος είναι $x_1 = A - \Delta \ell = 0,05\text{m}$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.Τ.:

$$E = U_1 + K_1 \Rightarrow U_{\max} = U_1 + K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_{\Sigma}^2 \Rightarrow kA^2 = kx_1^2 + (m_1 + m_2)u_{\Sigma}^2 \Rightarrow u_{\Sigma}^2 = \frac{k(A^2 - x_1^2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow u_{\Sigma}^2 = 0,75 \Rightarrow u_{\Sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την σύγκρουση των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{\text{APX}} = \vec{p}_{\text{TEΛ}} \Rightarrow m_1 \vec{u}_0 = (m_1 + m_2) \vec{u}_{\Sigma} \Rightarrow m_1 u_0 = (m_1 + m_2) u_{\Sigma} \Rightarrow u_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u_{\Sigma} \Rightarrow u_0 = 2u_{\Sigma} \Rightarrow u_0 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Άρα η κινητική ενέργεια του σώματος πριν την κρούση είναι: $K_2 = \frac{1}{2}m_2 u_0^2 = 1,5\text{J}$

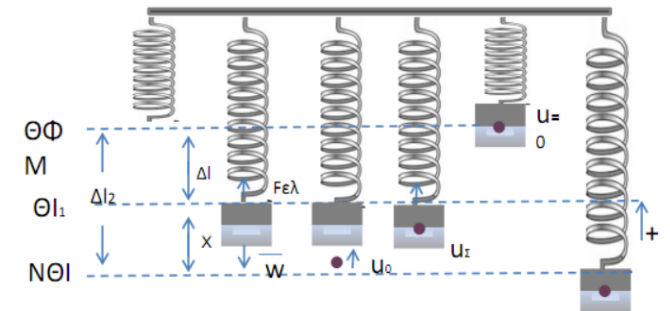
Γ3. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 είναι: $\Delta \vec{p}_2 = m_2 \vec{u}_{\Sigma} - m_2 \vec{u}_0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 u_{\Sigma} - m_2 u_0 \Rightarrow \Delta p_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

Επομένως η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη της κίνησης του σώματος Σ_2 .

Γ4. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$

Η αρχική φάση υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες $t_0 = 0, x_0 = +0,05\text{m}, u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow 0,05 = 0,1 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \text{ εφόσον } u_0 > 0 \text{ Άρα τελικά } x = 0,1 \eta \mu(10t + \frac{\pi}{6})$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το σώμα Σ ισορροπεί, επομένως: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w_\Sigma - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = w_\Sigma \Rightarrow T_1 = 20\text{N}$ [1]

Η τροχαλία ισορροπεί επομένως: $\Sigma \tau_T = 0 \Rightarrow T'_1 \cdot R_T - T'_2 \cdot R_T = 0 \Rightarrow T'_1 = T'_2$ [2]

Ο κύλινδρος ισορροπεί, άρα: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + w_K - T_2 - T_s = 0 \Rightarrow F + M_K \cdot g \eta \mu \varphi - T_2 - T_s = 0$ [3]

$$\Sigma \tau_K = 0 \Rightarrow T_2 \cdot R_K - T_s \cdot R_K = 0 \Rightarrow T_2 = T_s \text{ [4]}$$

Τα νήματα είναι αβαρή άρα $T_1 = T'_1 = 20\text{N}$ και $T_2 = T'_2$ οπότε από τη σχέση [2] προκύπτει: $T_2 = T'_2 = 20\text{N}$

Από τις σχέσεις [3], [4] έχουμε: $F + M_K \cdot g \eta \mu \varphi - 2T_2 \Rightarrow F = 2T_2 - M_K \cdot g \eta \mu \varphi \Rightarrow F = 30\text{N}$

Δ2. Από τον 2° Ν.Ν. για την κίνηση του σώματος Σ έχουμε: $\Sigma F_y = M_\Sigma \cdot \alpha_\Sigma \Rightarrow w_\Sigma - T_3 = M_\Sigma \cdot \alpha_\Sigma \Rightarrow T_3 = M_\Sigma \cdot g - M_\Sigma \cdot \alpha_\Sigma \Rightarrow T_3 = 20 - 2\alpha_\Sigma$ [5]

Η τροχαλία στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, άρα από τον 2° Ν.Ν. για την στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma \tau_T = I_T \cdot \alpha_{\gamma,T} \Rightarrow T'_3 \cdot R_T - T'_4 \cdot R_T = \frac{1}{2} M_T R_T^2 \cdot \alpha_{\gamma,T} \Rightarrow T'_3 - T'_4 = \frac{1}{2} M_T R_T \cdot \alpha_{\gamma,T} \Rightarrow T'_3 - T'_4 = \frac{1}{2} M_T \alpha_\Sigma \Rightarrow T'_3 - T'_4 = \alpha_\Sigma \text{ [6]}$$

Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, επομένως:

$$\Sigma F_x = M_K \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_4 + T'_s - M_K g \eta \mu \varphi = M_K \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_4 + T'_s - 10 = 2\alpha_{cm} \text{ [7]}$$

$$\Sigma \tau_K = I_{cm,K} \cdot \alpha_{\gamma,K} \Rightarrow T_4 \cdot R_K - T'_s \cdot R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma,K} \Rightarrow T_4 - T'_s = \frac{1}{2} M_K R_K \cdot \alpha_{\gamma,K} \Rightarrow T_4 - T'_s = \frac{1}{2} M_K \alpha_{cm} \Rightarrow T_4 - T'_s = \alpha_{cm} \text{ [8]}$$

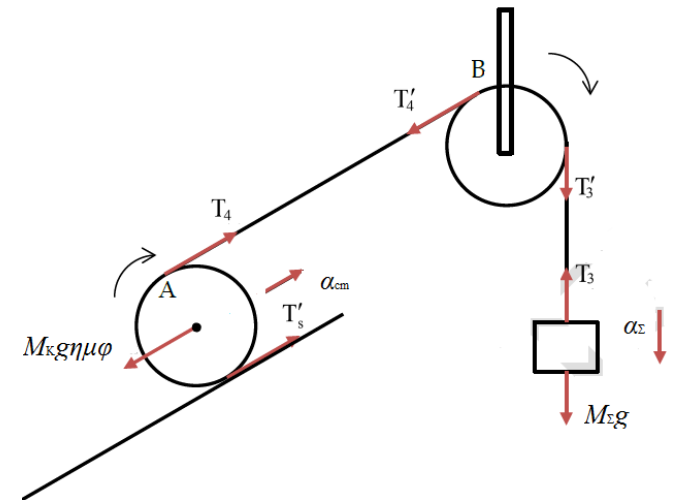
Προσθέτουμε κατά μέλη της [7] και [8] κι έχουμε: $2T_4 - 10 = 3\alpha_{cm}$ [9]

Τα νήματα είναι αβαρή άρα $T_3 = T'_3$ και $T_4 = T'_4$, άρα η εξ. [6] γράφεται $T_3 - T_4 = \alpha_\Sigma$ [10]

Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση άρα στο σημείο Α της περιφέρειας του ισχύει $\alpha_A = 2\alpha_{cm}$

ενώ αφού το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία τότε $\alpha_A = \alpha_B \Rightarrow 2\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma,T} \cdot R_T \Rightarrow 2\alpha_{cm} = \alpha_\Sigma$ [11]

Από τις σχέσεις [9], [10] και [11] προκύπτει τελικά $\alpha_\Sigma = 4\text{m/s}^2$



Δ3. Την χρονική στιγμή t_1 ο κύλινδρος έχει αποκτήσει ταχύτητα $u_{cm} = \alpha_{cm} t_1 = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ m/s}$

Αφού κοπεί το νήμα ο κύλινδρος εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.

Εφαρμόζουμε τον 2ο Ν.Ν για την μεταφορική και την στροφική κίνηση του σώματος κι έχουμε:

$$\Sigma F_x = M_K \alpha'_{cm} \Rightarrow M_K g \eta \mu \varphi - T = M_K \alpha'_{cm}$$

$$\Sigma \tau_K = I_{cm,K} \cdot \alpha'_{\gamma,K} \Rightarrow T R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 \cdot \alpha'_{\gamma,K} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M_K R_K \cdot \alpha'_{\gamma,K}$$

Εφόσον ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς ολίσθηση τότε $\alpha'_{cm} = R_K \cdot \alpha'_{\gamma,K}$, άρα από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$M_K g \eta \mu \varphi - \frac{1}{2} M_K \alpha'_{cm} = M_K \alpha'_{cm} \Rightarrow \alpha'_{cm} = \frac{2}{3} g \eta \mu \varphi \Rightarrow \alpha'_{cm} = \frac{10}{3} \text{ m/s}^2$$

$$\text{Άρα η εξίσωση της ταχύτητάς του είναι: } u'_{cm} = u_{cm, αρχ} - \alpha'_{cm} \Delta t = 1 - \frac{10}{3} \Delta t$$

$$\text{Ο κύλινδρος θα σταματήσει όταν } u'_{cm} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{10}{3} \Delta t = 0 \Rightarrow \Delta t = 0,3 \Rightarrow t_2 - 0,5 = 0,3 \Rightarrow t_2 = 0,8 \text{ s}$$

Δ4. Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 ο κύλινδρος έχει διανύσει απόσταση $s_1 = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 = 0,25 \text{ m}$

$$\text{ενώ στο χρονικό διάστημα που επιβραδύνεται έχει διανύσει απόσταση } s_2 = u_{cm, αρχ} \cdot t - \frac{1}{2} \alpha'_{cm} \Delta t^2 = 0,15 \text{ m}$$

$$\text{Άρα το συνολικό διάστημα που διένυσε είναι } s_{ολ} = s_1 + s_2 = 0,4 \text{ m}$$

Δ5. Καθώς ο κύλινδρος κινείται πάνω στη ράβδο ασκεί σε αυτήν μια δύναμη N' η οποία είναι ζεύγος δράσης αντίδρασης με τη δύναμη N που ασκεί η ράβδος στον κύλινδρο.

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ο κύλινδρος ισορροπεί άρα } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - M_K g \sigma \nu \eta \varphi = 0 \Rightarrow N = M_K g \sigma \nu \eta \varphi. \text{ Επομένως } N' = M_K g \sigma \nu \eta \varphi$$

Για να ανατραπεί η ράβδος όταν ο κύλινδρος βρίσκεται σε απόσταση x από το σημείο Γ θα πρέπει

$$\Sigma \tau_{\Gamma} = 0 \Rightarrow N' \cdot x - M_K g \eta \mu \varphi \cdot d = 0 \Rightarrow x = \frac{M_K g \eta \mu \varphi \cdot \left(\frac{\ell}{2} - B\Gamma \right)}{N'} \Rightarrow x = 0,5 \text{ m}$$

Αλλά ο κύλινδρος διανύει απόσταση $s_{ολ} = 0,4 \text{ m}$, άρα σταματά να κινείται σε απόσταση $0,2 \text{ m}$ από το σημείο Γ . Άρα η ράβδος δεν θα ανατραπεί.

